

Title	一ツノ函数方程式ニ就テ
Author(s)	春木, 博
Citation	全国紙上数学談話会. 231 p.761-p.763
Issue Date	1942-01-31
oaire:version	VoR
URL	https://doi.org/10.18910/74931
rights	
Note	

Osaka University Knowledge Archive : OUKA

<https://ir.library.osaka-u.ac.jp/>

Osaka University

1001. ヲツノ函数方程式ニ就キテ

春 木 博 (神戸高等商船学校)

$f(x) = \sin x$ ノハ例ニシテ函数方程式

$$(1) \quad f(-x+y+z) + f(x-y+z) + f(x+y-z) - f(x+y+z) \\ = 4f(x)f(y)f(z)$$

ヲ満足セシタル。逆ニ (1) ヲ満足セシタル可測函数 $f(x)$ ヲ求メヲ見ヨウ。

$$(1) = \text{於テ } x=y=z=0 \text{ トオケバ } (f(0)=C)$$

$$C = 2C^3$$

$$\text{故ニ, } C=0 \text{ 或ハ } C = \pm \frac{1}{\sqrt{2}}$$

$$C = \frac{1}{\sqrt{2}} \text{ ナルトキハ (1) = 於テ } y=z=0 \text{ トオケバ}$$

$$f(-x) + f(x) = 2f(x)$$

$$\therefore f(x) = f(-x)$$

即チ $f(x)$ ハ偶函数ナル。

$$(1) = \text{於テ, } z=0 \text{ トオケバ}$$

$$f(-x+y) + f(x-y) = 2\sqrt{2} f(x) f(y)$$

$$\text{偶函数ナル故ニ } f(-x+y) = f(x-y) \text{ ナル故ニ}$$

$$f(x-y) = \sqrt{2} f(x) f(y)$$

$$y \text{ ノ代リニ } -y \text{ トオケバ } f(x) \text{ ハ偶函数ナル故ニ}$$

$$f(x+y) = \sqrt{2} f(x) f(y)$$

$$\text{之ヨリ } f(x) = \frac{1}{\sqrt{2}} e^{ax} \quad (a \text{ ハ任意ノ實数})$$

$f(x)$ は偶函数ナル故 $\lambda = 0$

$$\text{即ち } f(x) \equiv \frac{1}{\sqrt{2}}$$

同様ニシテ $C = -\frac{1}{\sqrt{2}}$ ノトキモ $f(x) \equiv -\frac{1}{\sqrt{2}}$ ナル

$C = 0$ ナルトキハ (1) = 於テ $y = z = 0$ トオクコトニヨリ

$$f(-x) + f(x) = 0$$

即ち $f(x)$ は奇函数ナルコトが判ル。

(1) = 於テ $z = y$ トオケバ

$$f(-x+2y) - f(x+2y) = 2f(x)[2f^2(y) - 1]$$

$f(x)$ が奇函数ナル故

$$f(x+2y) + f(x-2y) = 2f(x)[1 - 2f^2(y)]$$

y 代リ $= \frac{y}{2}$ トオキ $\varphi(y) = 1 - 2f^2\left(\frac{y}{2}\right)$ トスレバ

$$f(x+y) + f(x-y) = 2f(x)\varphi(y)$$

$f(x)$ は可測ナル故、之レヨリ α, β, γ ナ任意ノ実数トス
ルトキ

$$f(x) = \beta \sin \alpha x + \gamma \cos \alpha x,$$

$$f(x) = \beta \sin h \alpha x + \gamma \cos h \alpha x,$$

$$f(x) = \alpha x + \beta$$

$f(0) = 0$ ナル故

$$f(x) = \beta \sin \alpha x, \quad f(x) = \beta \sin h \alpha x,$$

$$f(x) = \alpha x$$

之ヨリ, (1) = 適スルモノヲ求ムレバ, 結局、 α ナ任意ノ実数
トスルトキ, 求ムル $f(x)$ は

$$f(x) \equiv 0, \quad f(x) \equiv \frac{1}{\sqrt{2}}, \quad f(x) \equiv -\frac{1}{\sqrt{2}},$$

$$f(x) = \sin \alpha x, \quad f(x) = \sin h \alpha x$$

—— (完) ——